Alumno____ nº matrícula: | | | | | |

NORMAS DEL EXAMEN: 1) Cada ejercicio debe resolverse *en la hoja del enunciado*: no se admiten hojas adicionales. 2) Debe escribirse con tinta azul o negra: no se admite escritura a lápiz ni en color rojo. 3) El DNI del alumno debe estar a la vista sobre la mesa. 4) No está permitido levantarse ni hablar hasta que se hayan recogido los últimos ejercicios y se salga del aula de examen. 5) Se puede disponer sólo del Formulario oficial de la asignatura (sin informaciones adicionales de ningún tipo) y del papel en blanco para uso como borrador. 6) No se hacen aclaraciones.

Ejercicio nº 1.- En el espacio vectorial $\mathbb{V}_3$ se dan dos vectores. $\underline{a}$ y $\underline{b}$, de módulos a y b, y formando entre sí un ángulo $\theta \in\ ]0\ ,\ \frac{\pi}{2}[$. Se consideran el tensor $\underline{\mathbf{T}} = [(\underline{a}\times\underline{b})\times]\cdot(\underline{a}\otimes\underline{b})$ y la base vectorial $\mathcal{B} = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{a}\times\underline{b}\}$. Se pide:

1) Operando intrínsecamente, deducir las componentes contravariantes puras de $\underline{\mathbf{T}}$ en la base diádica asociada a $\mathcal{B}$. ¿Es $\underline{\mathbf{T}}$ un tensor simétrico? [3 puntos]

2) Obtener las componentes mixtas contra-covariantes de $\underline{\mathbf{T}}$ en dicha base y calcular sus autovalores y autovectores. [5 puntos]

3) Expresar el tensor $\underline{\mathbf{T}}$ como forma diádica contravariante pura en una base de autovectores. [2 puntos]

Solución:

1) Tomando un vector genérico, $\underline{x} \in \mathbb{V}_3$, se tiene:

$$\underline{\mathbf{T}}\cdot\underline{x} = [(\underline{a}\times\underline{b})\times]\cdot[(\underline{a}\otimes\underline{b})\cdot\underline{x}] = [(\underline{a}\times\underline{b})\times]\cdot(\underline{a}(\underline{b}\cdot\underline{x})] = (\underline{b}\cdot\underline{x})[(\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{a}] = (\underline{b}\cdot\underline{x})[\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{a})] = (\underline{b}\cdot\underline{x})[\underline{b}a^2 - \underline{a}(\underline{a}\cdot\underline{b})] =$$

$$= a^2\underline{b}(\underline{b}\cdot\underline{x}) - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{a}(\underline{b}\cdot\underline{x}) = [a^2\underline{b}\otimes\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{a}\otimes\underline{b}]\cdot\underline{x} = [a^2\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{a}]\otimes\underline{b}\cdot\underline{x} \Rightarrow \boxed{\underline{\mathbf{T}} = a^2\underline{b}\otimes\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{a}\otimes\underline{b}} \quad (1)$$

Así se ha obtenido el desarrollo contravariante puro de $\underline{\mathbf{T}}$ en la base $\mathcal{B}$, siendo: $t^{12} = -\underline{a}\cdot\underline{b}$, $t^{22} = a^2$, resto nulos. La matriz de $\underline{\mathbf{T}}$ en contravariantes, es, pues: $[t^{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -ab\cos\theta & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, donde se aprecia directamente que $\underline{\mathbf{T}}$ NO es un tensor simétrico.

NOTA: También se puede proceder en componentes en la base $\mathcal{B}$, usando la matriz de Gram (que se calcula más abajo) y que $\underline{\mathbf{T}}$ es el producto $(\underline{g}_3\times)\cdot(\underline{g}_1\otimes\underline{g}_2)$: se expresa $(\underline{g}_3\times)$ en *contras puras*, $\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2b^2\,\text{sen}^2\theta}\begin{bmatrix} 0 & -a^2b^2\,\text{sen}^2\theta & 0 \\ a^2b^2\,\text{sen}^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, se expresa $\underline{g}_1\otimes\underline{g}_2$ en cova-contras, $\begin{bmatrix} a^2 \\ ab\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^2 & 0 \\ 0 & ab\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, y se efectúa el producto $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & a^2 & 0 \\ 0 & ab\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [t^{ij}]$ #.

2) Obtenemos las componentes mixtas contra-covariantes bajando el segundo índice de las t^{ij}, para lo que precisamos la matriz de Gram de la base $\mathcal{B}$, o sea:

$$G = [\underline{g}_i\cdot\underline{g}_j] = \begin{bmatrix} \underline{a}\cdot\underline{a} & \underline{a}\cdot\underline{b} & \cancel{\underline{a}\cdot(\underline{a}\times\underline{b})} \\ \underline{b}\cdot\underline{a} & \underline{b}\cdot\underline{b} & \cancel{\underline{b}\cdot(\underline{a}\times\underline{b})} \\ \cancel{(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{a}} & \cancel{(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{b}} & (\underline{a}\times\underline{b})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab\cos\theta & 0 \\ ab\cos\theta & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2b^2\,\text{sen}^2\theta \end{bmatrix} = [g_{ij}]$$

Así, efectuamos:

$$[t^i{}_j] = [t^{ih}]\cdot[g_{hj}] = \begin{bmatrix} 0 & -ab\cos\theta & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a^2 & ab\cos\theta & 0 \\ ab\cos\theta & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2b^2\,\text{sen}^2\theta \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -a^2b^2\cos^2\theta & -ab^3\cos\theta & 0 \\ a^3b\cos\theta & a^2b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [t^i{}_j]} \quad (2)$$

(Nota: se aprecia en la 3ª columna de esta matriz que $\underline{\mathbf{T}}\cdot\underline{g}_3 = \underline{\mathbf{T}}\cdot(\underline{a}\times\underline{b}) = \underline{0}$, luego hay un autovalor nulo cuyo subespacio asociado contiene al vector $\underline{a}\times\underline{b}$).

Obtenemos el polinomio característico

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(\underline{\mathbf{T}} - \lambda\underline{\mathbf{1}}) = \det\begin{bmatrix} -a^2b^2\cos^2\theta-\lambda & -ab^3\cos\theta & 0 \\ a^3b\cos\theta & a^2b^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda[(-a^2b^2\cos^2\theta - \lambda)(a^2b^2 - \lambda) + a^4b^4\cos^2\theta] =$$

$$= -\lambda[-a^4b^4\cos^2\theta + \lambda a^2b^2\cos^2\theta - \lambda a^2b^2 + \lambda^2 + a^4b^4\cos^2\theta] = -\lambda[\lambda^2 - \lambda a^2b^2(1-\cos^2\theta)] = -\lambda^2(\lambda - a^2b^2\,\text{sen}^2\theta)$$

O sea: $$\boxed{\mathcal{P}(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - a^2b^2\,\text{sen}^2\theta)} \quad (3)$$

Los autovalores de $\underline{\mathbf{T}}$ son las raíces de este polinomio, o sea:

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ (doble)},\ \lambda_3 = a^2b^2\,\text{sen}^2\theta} \quad (4)$$

Y los autovectores son la base de cada subespacio propio asociado a cada autovalor. Comenzamos por el autovalor simple:

$$\underline{w}_3\in\Lambda(\lambda_3) = \ker[\underline{\mathbf{T}}-a^2b^2\text{sen}^2\theta\,\underline{\mathbf{1}}] = \ker\begin{bmatrix} -a^2b^2\cos^2\theta-a^2b^2\text{sen}^2\theta & -ab^3\cos\theta & 0\\ a^3b\cos\theta & a^2b^2-a^2b^2\text{sen}^2\theta & 0\\ 0 & 0 & -a^2b^2\text{sen}^2\theta\end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix} -a^2b^2 & -ab^3\cos\theta & 0\\ a^3b\cos\theta & a^2b^2\cos^2\theta & 0\\ 0 & 0 & -a^2b^2\text{sen}^2\theta\end{bmatrix} =$$

$$= \{\underline{x}\in\mathbb{V}_3 \,/\, -a^2b^2\,x^1 - ab^3\cos\theta\, x^2 = 0,\ a^3b\cos\theta\, x^1 + a^2b^2\cos^2\theta\, x^2 = 0,\ -a^2b^2\text{sen}^2\theta\, x^3 = 0\} =$$

$$= \{\underline{x}\in\mathbb{V}_3 \,/\, -a\, x^1 - b\cos\theta\, x^2 = 0,\ a\, x^1 + b\cos\theta\, x^2 = 0,\ x^3 = 0\} = \{\underline{x} \,/\, x^1 = -\tfrac{b\cos\theta}{a}\, x^2,\ x^3 = 0\} = \Lambda(a^2b^2\text{sen}^2\theta)$$

Tomando $x^2 = a$, $x^1 = -b\cos\theta$, $x^3 = 0$, se tiene un vector de este subespacio:

$$\boxed{\underline{w}_3 = -b\cos\theta\ \underline{a} + a\ \underline{b}\ \ \text{: autovector asociado a } \lambda_3 = a^2b^2\text{sen}2\theta} \tag{5}$$

Los autovectores asociados al autovalor doble, $\lambda_1 = 0$, se tomarán del subespacio correspondiente:

$$\Lambda(0) = \ker(\underline{\mathbf{T}}) = \ker\begin{bmatrix} -a^2b^2\cos^2\theta & -ab^3\cos\theta & 0\\ a^3b\cos\theta & a^2b^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} =\ldots= \{\underline{x}\in\mathbb{V}_3 \,/\, a\cos\theta\, x^1 + b\, x^2 = 0\} = \{\underline{x} \,/\, x^2 = -\tfrac{a\cos\theta}{b}\, x^1\}$$

Se observa que este subespacio es un plano vectorial y podemos tomar de él dos autovectores linealmente independientes, como resultan haciendo:

para $\underline{w}_1$: $x^1 = b$, $x^2 = -a\cos\theta$, $x^3 = 0$; y para $\underline{w}_2$: $x^1 = x^2 = 0$, $x^3 = 1$

o sea:

$$\boxed{\underline{w}_1 = b\underline{a} - a\cos\theta\underline{b}\ ,\ \underline{w}_2 = \underline{a}\times\underline{b}\ \text{: autovectores asociados a } \lambda_1 = 0} \tag{6}$$

Se observa que $\underline{w}_2$ es ortogonal con $\underline{w}_1$ y también con $\underline{w}_3$, lo que simplifica la matriz de Gram de la base de autovectores (que interesa en el apartado siguiente).

3) Resulta, pues, que $\underline{\mathbf{T}}$ es diagonalizable en la base $\{\underline{w}_\text{i}\}$ de autovectores. En ella, las componentes contra-covariantes de $\underline{\mathbf{T}}$ se expresan en la matriz diagonal:

$$\left[\hat{t}^{\text{i}}{}_{\text{j}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a^2b^2\,\text{sen}^2\theta\end{bmatrix}$$

Pero se pide la expresión contravariante pura y para obtenerla se puede proceder de dos formas distintas (escogeremos la que parezca más breve): i) subir el segundo índice de la matriz diagonal escrita, lo que exige determinar la matriz inversa de la matriz de Gram de la base de autovectores; ii) cambiar la matriz contravariante pura de $\underline{\mathbf{T}}$, hallada en el primer apartado, a la base de autovectores.

Con la observación anterior, escogemos el primer camino, determinando $\hat{\text{G}}=\left[\underline{w}_\text{i}\cdot\underline{w}_\text{j}\right]$ efectuando intrínsecamente los productos escalares:

$\underline{w}_1\cdot\underline{w}_1 = (b\underline{a} - a\cos\theta\underline{b})^2 = a^2b^2 - 2a^2b^2\cos^2\theta + a^2b^2\cos^2\theta = a^2b^2\text{sen}^2\theta = \hat{g}_{11}$

$\underline{w}_1\cdot\underline{w}_2 = 0 = \underline{w}_2\cdot\underline{w}_3 \Rightarrow \hat{g}_{12} = \hat{g}_{21} = \hat{g}_{23} = \hat{g}_{32} = 0$; $\underline{w}_2\cdot\underline{w}_2 = |\underline{a}\times\underline{b}|^2 = a^2b^2\text{sen}^2\theta = \hat{g}_{22}$

$\underline{w}_3\cdot\underline{w}_3 = (-b\cos\theta\underline{a} + a\underline{b})^2 = a^2b^2\cos^2\theta - 2a^2b^2\cos^2\theta + a^2b^2 = a^2b^2\text{sen}^2\theta = \hat{g}_{33}$

$\underline{w}_1\cdot\underline{w}_3 = (b\underline{a}-a\cos\theta\underline{b})\cdot(-b\cos\theta\underline{a}+a\underline{b}) = -a^2b^2\cos\theta+a^2b^2\cos\theta+a^2b^2\cos^3\theta-a^2b^2\cos\theta = -a^2b^2\cos\theta\text{sen}^2\theta = \hat{g}_{13}$

luego

$$\hat{\text{G}} = \left[\underline{w}_\text{i}\cdot\underline{w}_\text{j}\right] = \begin{bmatrix} a^2b^2\,\text{sen}^2\theta & 0 & -a^2b^2\cos\theta\,\text{sen}^2\theta\\ 0 & a^2b^2\,\text{sen}^2\theta & 0\\ -a^2b^2\cos\theta\,\text{sen}^2\theta & 0 & a^2b^2\,\text{sen}^2\theta\end{bmatrix} = a^2b^2\,\text{sen}^2\theta\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\cos\theta & 0 & 1\end{bmatrix}$$

de donde

$$\hat{\text{G}}^{-1} = \frac{1}{a^2b^2\,\text{sen}^2\theta}\begin{bmatrix} \frac{1}{\text{sen}^2\theta} & 0 & \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} & 0 & \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\end{bmatrix}$$

y finalmente:

$$\left[\hat{t}^{\text{ij}}\right] = \left[\hat{t}^{\text{i}}{}_{\text{h}}\right]\cdot\hat{\text{G}}^{-1} = \frac{1}{a^2b^2\,\text{sen}^2\theta}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a^2b^2\,\text{sen}^2\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{\text{sen}^2\theta} & 0 & \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} & 0 & \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\end{bmatrix} = \frac{1}{a^2b^2\,\text{sen}^2\theta}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ a^2b^2\cos\theta & 0 & a^2b^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{\cos\theta}{\text{sen}^2\theta} & 0 & \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\end{bmatrix}$$

La forma diádica pedida será:

$$\boxed{\underline{\mathbf{T}} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\left(\cos\theta\underline{w}_3\otimes\underline{w}_1 + \underline{w}_3\otimes\underline{w}_3\right)} \tag{7}$$